page 160 ECOLES de TRAVAUX PUBLICS:T.P.E. 1987 Math 1

E.I.T.P.E. 1987

MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE ET DES TRANSPORTS

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (M, P', TA)

(Temps accordé : 4 heures)

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, n un entier positif, $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur le corps $\mathbb{K}$, I l'élément unité de $M_n(\mathbb{K})$. On pourra supposer sans inconvénient que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

PARTIE I

I.1 - On suppose, jusqu'au I.4, que $n \geqslant 2$.

a) - On désigne par E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1. Vérifier que $E_{jk}.E_{qr} = \delta_{kq}.E_{jr}$, où $\delta_{kq} = 0$ si $k \neq q$ et 1 si $k = q$.

b) - Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'addition à un vecteur ligne de A d'un vecteur proportionnel à un autre vecteur ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice convenable.

Démontrer qu'on peut effectuer une opération analogue avec les vecteurs colonnes par une multiplication à droite.

I.2 - On suppose que la première ligne de A comporte au moins un élément non nul. Montrer qu'il existe des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda.E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que P.A.Q soit de la forme :

$$P.A.Q = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(On pourra, dans un premier temps, transformer la matrice A en une matrice qui comporte un élément égal à 1 à l'intersection de la première ligne et de la première colonne).

I.3 - On suppose que A est de rang $r > 0$. Montrer qu'il existe des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda.E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ telles que :

$$P.A.Q = B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & d & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

le terme d étant à la place d'indice r sur la diagonale et $d \neq 0$.

Montrer, en outre, que si $r < n$, on peut choisir $d = 1$. (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

I.4 - En déduire que le groupe $S_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n et de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices $I + \lambda.E_{ij}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

I.5 - Dans la suite du problème, on suppose que $n \geqslant 3$. Montrer que toute matrice de la forme $I + \lambda.E_{ij}$ pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ s'exprime comme un commutateur de telles matrices :

$$I + \lambda.E_{ij} = A^{-1}.B^{-1}.A.B = [A,B]$$

où A et B sont de la forme $I + \alpha.E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Tournez la page S. V. P.

PARTIE II

On rappelle que $n \geqslant 3$. Soit ϕ une application de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les conditions suivantes :

(*) $\forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi(A.B) = \phi(A).\phi(B)$

(**) Pour toute matrice diagonale D, $\phi(D)$ est le produit des éléments diagonaux de D.

II.1 - Etant donnés deux indices distincts i et j compris entre 1 et n, on pose, pour tout scalaire $t \in \mathbb{K}$, $f(t) = \phi(I + t.E_{ij})$.

Prouver que $f(t) = 1$ pour tout t appartenant à $\mathbb{K}$.

II.2 - Montrer que $\phi(X) = \det(X)$ pour toute matrice X de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

PARTIE III

On suppose toujours que $n \geqslant 3$. Soit ψ une application de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ dans un ensemble E telle que :

$\psi(X.Y.Z) = \psi(X.Z.Y)$, pour tout triplet de matrices X, Y, Z.

III.1 - Démontrer que pour toute matrice X de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice U de $S_n(\mathbb{K})$ on a :

$\psi(X.U) = \psi(X) = \psi(U.X)$

III.2 - Pour tout $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on pose :

$$X_r = \left\| \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|$$

où I_r est la matrice unité à r lignes et r colonnes.

a) - Montrer que pour A et B, matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ telles que rang (A) = rang (B) = r < n, on a $\psi(A) = \psi(B)$.

b) - Montrer qu'il existe une matrice Y de rang r telle que :

$$X_{r-1} = Y.X_r \quad \text{et que} \quad Y = X_r.Y$$

(On pourra raisonner sur les endomorphismes associés).

c) - En déduire que ψ prend la même valeur sur toutes les matrices de rang strictement inférieur à n.

III.3 - En conclure que pour toutes matrices X et Y de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'implication :

$$\det(X) = \det(Y) \Longrightarrow \psi(X) = \psi(Y)$$

ECOLES de TRAVAUX PUBLICS:T.P.E.
Math 1
page 161
1987